19. Verify divergence theorem for $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ taken over the cube bounded by $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

$x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ ஆகியவற்றால் மூடப்பட்ட கணக்கின் மீது $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ என்ற வெக்டர் சார்புக்கு பாய்வு தேற்றத்தை சரிபார்க்க.

20. Find the Fourier cosine series for the function

$$F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}.$$

$$F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$ என்ற சார்பிற்கு ஃபூரியர் கொசைன் தொடரை காண்க.

APRIL/MAY 2023

CMA41 — VECTOR ANALYSIS AND FOURIER SERIES

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Shanmuga Arts & Science College T.V.Malai

1. If $\vec{u} = t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$ and $\vec{v} = (2t-3)\vec{i} + \vec{j} - t\vec{k}$ then find $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

$\vec{u} = t^2\vec{i} - t\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$ மற்றும் $\vec{v} = (2t-3)\vec{i} + \vec{j} - t\vec{k}$ எனில் $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v})$ காண்க.

2. If $\vec{F} = (2x^2y - x^4)\vec{i} + (e^{xy} - y\sin x)\vec{j} + (x^2\cos y)\vec{k}$ find $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x}$.

$\vec{F} = (2x^2y - x^4)\vec{i} + (e^{xy} - y\sin x)\vec{j} + (x^2\cos y)\vec{k}$ எனில் $\dfrac{\partial \vec{F}}{\partial x}$ காண்க.

3. Show that $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$.

$\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$ என நிறுவுக.

4. Define solenoidal vector.

திசையன் வழி சுற்று வரையறு.

5. Define conservative vector field.

காப்பு நிலை திசையன் களத்தை வரையறு.

6. Find the unit normal to the surface $x^2y + 2xz^2 = 8$ at the point (1, 0, 2).

$x^2y + 2xz^2 = 8$ என்ற பரப்பில் (1, 0, 2) என்ற புள்ளியில் ஓரலகு செங்குத்து காண்க.

7. If $\vec{F} = (5xy - 6x^2)\vec{i} + (2y - 4x)\vec{j}$, evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ along the curve C in the xy plane, $y = x^3$ from the point (1, 1) to (2, 8).

$\vec{F} = (5xy - 6x^2)\vec{i} + (2y - 4x)\vec{j}$ எனில் xy தளத்தில் (1, 1) என்ற புள்ளியிலிருந்து (2, 8) வரை $y = x^3$ என்ற வளைவரை C வழியாக $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ காண்க.

8. State Green's theorem.

கிரீனின் தேற்றத்தை கூறுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $\vec{A} = 5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}$, $\vec{B} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$, find

(a) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ (b) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$

$\vec{A} = 5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}$, $\vec{B} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$ எனில்

(அ) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ (ஆ) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$

17. If $\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ find $div\ grad\ \phi$, $curl\ grad\ \phi$.

$\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ எனில், $div\ grad\ \phi$, $curl\ grad\ \phi$ கண்டுபிடி.

18. Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ where $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ and S is the surface of the cylinder $x^2 - y^2 = 16$ included in the first octant between $z = 0$ and $z = 5$.

$\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ தளங்கள் $z = 0$ மற்றும் $z = 5$ ஆகியவற்றிற்கிடையிலும் முதல் அரைக்கால பகுதியில் அமைவதுமான உருளை $x^2 + y^2 = 16$ன் மேற்பரப்பு S எனில் $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ ன் மதிப்பு காண்க.

(b) Evaluate the Green's theorem $\int_C (e^{-x}\sin y\,dx + e^{-x}\cos y\,dy)$, where C is the rectangle with vertices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ என்பதை முனைகளாகக் கொண்ட செவ்வகம் C எனில் கிரீன்ஸ் தேற்றத்தின்படி $\int_C (e^{-x}\sin y\,dx + e^{-x}\cos y\,dy)$ மதிப்பிடுக.

15. (a) Express $F(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ on a Fourier series.

$F(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ -ற்கு ஃபூரியர் தொடர் வரிசை எழுதுக.

Or

(b) Find a sine series for $F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & x > \pi \end{cases}$ in $(0, \pi)$.

$(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & x > \pi \end{cases}$ யின் சைன் தொடரை கண்டுபிடி.

Shanmuga Arts & Science College T.V.Malai

9. Explain briefly change of interval.

இடைவெளி மாற்றத்தை சுருக்கமாக கூறுக.

10. If the half range Fourier sine series for x in $(0, l)$ find b_n.

$(0, l)$ ல் x ன் அரைவீச்சு பூரியர் சைன் தொடரில் b_n மதிப்பைக் காண்க.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})) = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})) = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$$

என நிரூபி.

Or

(b) Find the unit tangent vector to the curve $x = 3t + 2$ $y = 5t^2$, $z = 2t - 1$ at the point $t = 1$.

$x = 3t + 2$ $y = 5t^2$, $z = 2t - 1$க்கு $t = 1$ புள்ளியிடத்து தொடுகோடு அலகு வெக்டரை காண்க.

12. (a) Find the directional derivative of $\phi = x^2yz + 4xz^2$ in the direction of the vector $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ at (1, 1, 1).

(1, 1, 1)-ல் $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ என்ற வெக்டர் திசையில் $\phi = x^2yz + 4xz^2$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

Or

(b) If $\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ Find *curl grad* ϕ.

$\phi = x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz$ *curl grad* ϕ-ஐ கண்டுபிடி.

13. (a) Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ and the curve C is the rectangle bounded by $y = 0$, $x = a$, $y = b$ $x = 0$ in the xy plane.

$y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$ என்பது xy தளத்தில் வரம்புடைய வளைவு C ஓர் செவ்வகம் எனில் $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$க்கு $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ மதிப்பிடுக

Or

(b) Evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds$ where $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ and S is that part of the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ which lies in the first quadrant.

$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ மேலும் S என்பது எண்மத்தில அமையும் $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்னும் கோளத்தின பகுதி எனில் $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds$ மதிப்பு காண்க.

14. (a) Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ by Stoke's theorem where $\vec{F} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} - (x + z)\vec{k}$ and C is the boundary of the triangle with vertices at (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)

(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) என்பதை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் வரம்பு C மற்றும் $\vec{F} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} - (x + z)\vec{k}$ எனில் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தின்படி $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ மதிப்பிடுக.

Or